מבוא ללוגיקה ותורת הקבוצות - 2026

פתרון תרגיל 1

10 נקודות

1. **א.** לכל $k \in \mathbb{N}$ נגדיר את הקבוצה $A_k = [k-1, 2k+3]$ כתבו (ללא הסבר) את הקבוצות $\bigcap_{k=3}^{7} A_k$ ו- $\bigcup_{k=0}^{10} A_k$.

ב. נגדיר: $A = \{S \in P(\mathbb{N}) | \mathbb{N}_{odd} \subseteq S \wedge \{2\} \nsubseteq S\}$. כתבו (ללא הסבר) את הקבוצה $\bigcup A \setminus \bigcap A$.

פתרון:

א. $\bigcap_{k=3}^{7} A_k = [6,9]$, $\bigcap_{k=0}^{10} A_k = [-1,23]$.

ב. $\bigcap A = \mathbb{N}_{odd}$, $\bigcup A = \mathbb{N} \setminus \{2\}$, לכן $\bigcup A \setminus \bigcap A = \mathbb{N}_{even} \setminus \{2\} = \{0,4,6,8,\dots\}$

20 נקודות

2. **א.** הוכיחו: $\bigcap_{n=0}^{\infty}(-\infty, -n) = \emptyset$.

ב. הוכיחו: לכל k טבעי מתקיים $\bigcap_{n=0}^{k}(-\infty, -n) \neq \emptyset$.

פתרון:

א. **הוכחה:**

- נניח בשלילה שקיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש- $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty}(-\infty, -n)$.
- נבחר $k = \lceil |x| \rceil \in \mathbb{N}$.
- מתקיים $|x| \leq k$ ולכן $-k \leq x \leq k$ ובפרט $-k \leq x$.
- לכן $x \notin (-\infty, -k)$ בסתירה לכך שלכל $n \in \mathbb{N}$ ובפרט עבור $n = k$ מתקיים לפי הגדרת החיתוך הגדול ש- $x \in (-\infty, -k)$.
- לכן $\bigcap_{n=0}^{\infty}(-\infty, -n) = \emptyset$ כנדרש.

ב. **הוכחה:**

- יהי k טבעי. נוכיח שקיים $x \in \bigcap_{n=0}^{k}(-\infty, -n)$.
- נבחר $x = -k-1$.
- קל לראות ש- $x < -k$ ולכן $x \in (-\infty, -k)$
- כמו כן, לכל $0 \leq n \leq k$ מתקיים $-k \leq -n$ ולכן מטרנזיטיביות $x \in (-\infty, -n)$.
- לכן, לפי הגדרת חיתוך גדול, $x \in \bigcap_{n=1}^{k}(n, \infty)$ ולכן <u>החיתוך אינו ריק</u>.

20 נקודות

.3 הוכיחו: $\mathbb{R}^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n},\infty\right)$

פתרון:

- נוכיח הכלה דו-כיוונית:
- נוכיח ש-$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n},\infty\right) \subseteq \mathbb{R}^+$:

יהי $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n},\infty\right)$. מהגדרת האיחוד הגדול קיים $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ כך ש-$x \in \left(\frac{1}{n},\infty\right)$.

ברור שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\left(\frac{1}{n},\infty\right) \subseteq \mathbb{R}^+$, לכן $x \in \mathbb{R}^+$.

- נוכיח ש-$\mathbb{R}^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n},\infty\right)$:

יהי $x \in \mathbb{R}^+$. נראה שקיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$\frac{1}{n} < x$:

נתבונן במיקום הראשון אחרי הנקודה העשרונית בו מופיעה ספרה שאינה 0 בייצוג העשרוני של המספר הממשי x. נסמן את המיקום הזה ב-m (ברור ש-m הינו מספר טבעי) למשל עבור 0.00231 מתקיים $m = 3$.

כלומר קיים $n = 10^{m+1}$ טבעי כך שמתקיים $\frac{1}{n} < x$ ולכן $x \in \left(\frac{1}{n},\infty\right)$.

מהגדרת איחוד גדול מתקיים $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n},\infty\right)$.

15 נקודות

.4 **הוכיחו**: אקסיומת ההפרדה ניתנת להוכחה על ידי שאר האקסיומות.

הדרכה: הגדירו קבוצה A ופרדיקט $P(x)$ ואז הפרידו לשני מקרים:

.1 לכל $x \in A$ מתקיים $P(x) = F$.

.2 קיים $x \in A$ שעבורו $P(x) = T$.

פתרון:

- בהנתן הקבוצה A והפרדיקט $P(x)$, נוכיח שקיימת הקבוצה $B = \{x \in A | P(x)\}$.
- נפריד למקרים:

.1 לכל $x \in A$ מתקיים $P(x) = F$.

במצב זה $B = \emptyset$. קבוצה זו אכן קיימת לפי אקסיומת הקבוצה הריקה.

.2 קיים $x \in A$ שעבורו $P(x) = T$.

נסמנו a, כלומר $P(a) = T$. נגדיר מיפוי על A באופן הבא:

$$m(x) = \begin{cases} x & P(x) = T \\ a & P(x) = F \end{cases}$$

- לפי אקסיומת ההחלפה, קיימת קבוצה B הנוצרת מ-A ע"י החלפת כל איבר $x \in A$ באיבר $m(x)$.

לפי הגדרת $m(x)$ בדוגמה הנ"ל, בקבוצה B שתווצר יהיו רק איברים המקיימים $P(x) = T$.

מכאן ש-$B = \{x \in A | P(x)\}$.

-

15 נקודות

5. **א.** תהי A קבוצה. תהי B הקבוצה המתקבלת מ-A ע"י הפעלת אקסיומת קבוצת החזקה. תהי C הקבוצה המתקבלת מ-B ע"י הפעלת אקסיומת האיחוד. הוכיחו פורמלית: $A = C$.

ב. נתונה הקבוצה $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. בנו ממנה את הקבוצה $B = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ על ידי שימוש בשתי אקסיומות בדיוק, כאשר אף אחת מהן אינה אקסיומת ההחלפה.

פתרון:

א. נוכיח שלפי אקסיומת ההיקפיות יש לשתי הקבוצות אותן איברים:

תהי $S \in A$:

- מהגדרת קבוצת חזקה מתקיים $\{S\} \in B$ (B היא קבוצת החזקה של A).
- לכן קיימת קבוצה $\{S\} \in B$ כך ש-$S \in \{S\}$.
- מהגדרת אקסיומת האיחוד $S \in C$.

תהי $S \in C$:

- מהיות C האיחוד הגדול של B, קיימת קבוצה $K \in B$ כך ש-$S \in K$.
- אבל מכיוון ש-$B = P(A)$ הרי ש-$K \subseteq A$.
- לכן $S \in A$.

ב. נשתמש באקסיומת קבוצת החזקה ובאקסיומת המיפוי.

- נפעיל את אקסיומת קבוצת החזקה על A ונקבל את הקבוצה $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.
- נפעיל את אקסיומת ההפרדה על B עם הפרדיקט $P(S) := (|S| = 1)$ (מחזיר T אם בקבוצה יש איבר אחד בדיוק) ונקבל את הקבוצה המבוקשת.

20 נקודות

6. <u>לגבי כל אחד מהייצוגים הבאים, האם הוא מקיים את תכונות הזוג הסדור:</u>

א. נייצג את הזוג הסדור (x,y) ע"י $\{\{x,\emptyset\},\{x,y\}\}$.

ב. נייצג את הזוג הסדור (x,y) ע"י $\{\{x,\emptyset\},y\}$.

פתרון:

א. כן, נוכיח באופן פורמלי:

צ"ל: $a=x \wedge b=y \quad \leftrightarrow \quad \{\{a,\emptyset\},\{a,b\}\}=\{\{x,\emptyset\},\{x,y\}\}$

$\Rightarrow$ טריוויאלי.

$\Leftarrow$ נפריד למקרים:

$$\{a,\emptyset\}=\{x,\emptyset\} \rightarrow a=x \rightarrow \{a,b\}=\{x,y\} \rightarrow b=y$$

$$\searrow a=\emptyset \rightarrow x=\emptyset \rightarrow \{a,b\}=\{x,y\} \rightarrow b=y$$

$$\{a,\emptyset\}=\{x,y\} \rightarrow a=x\,,y=\emptyset \rightarrow \{a,b\}=\{x,\emptyset\} \rightarrow b=\emptyset$$

$$\searrow a=y,x=\emptyset \rightarrow \{a,b\}=\{x,\emptyset\}=\{\emptyset\} \rightarrow a=b=x=y=\emptyset$$

ב. הייצוג לא מקיים את התכונה.

צ"ל **<u>שלא</u>** מתקיים $(a=x \ \wedge b=y) \leftrightarrow \{\{a,\emptyset\},b\}=\{\{x,\emptyset\},y\}$

נפריך ע"י דוגמה נגדית:

נבחר את הזוגות הסדורים $(x,y)=(1,\{\emptyset\})$, $(a,b)=(\emptyset,\{1,\emptyset\})$.

לפי הייצוג המוגדר בשאלה מתקיים:

$$\{\{a,\emptyset\},b\}=\{\{\emptyset\},\{1,\emptyset\}\}$$

$$\{\{x,\emptyset\},y\}=\{\{1,\emptyset\},\{\emptyset\}\}$$

קל לראות ששני הייצוגים זהים, אבל לא מתקיים $a=x \ \wedge b=y$ כי $1 \neq \emptyset$.